CHAPITRE 1

Système thermodynamique et premier principe

1.3 Fonction d'état : élastique

★★★★ Un élastique de longueur L est une fonction $L(T,f)$ de sa température T et des forces de norme f exercées sur ses extrémités afin de l'étirer. L'étirement de l'élastique est caractérisé par deux propriétés physiques :

1) le coefficient de dilatation à force constante $\alpha_f = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L(T,f)}{\partial T}$,
2) le coefficient de compressibilité à température constante $\chi_T = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L(T,f)}{\partial f}$.

On considère que la longueur $L(T,f)$ de l'élastique est une fonction linéaire de la température T et de la force f dans la limite où ces grandeurs varient peu, c'est-à-dire $\Delta T \ll T$ et $\Delta f \ll f$. Dans cette limite, déterminer la variation de longueur ΔL de l'élastique pour une variation ΔT de la température et une variation Δf des forces appliquées.

1.3 Solution

La différentielle (1.8) de la longueur de l'élastique s'écrit,

$$dL(T,f) = \frac{\partial L(T,f)}{\partial T}\,dT + \frac{\partial L(T,f)}{\partial f}\,df$$

Dans la limite où la température T et la force f varient peu, la longueur $L(T,f)$ de l'élastique est une fonction linéaire de la température T et de la force f. Cela signifie que les dérivées partielles de la longueur $L(T,f)$ par rapport à la température T et à la force f sont constantes. Ainsi, l'intégration de la différentielle de la longueur $dL(T,f)$ de l'élastique d'une longueur L à une longueur $L+\Delta L$ s'écrit formellement,

$$\int_L^{L+\Delta L} dL' = \frac{\partial L(T,f)}{\partial T}\int_T^{T+\Delta T} dT' + \frac{\partial L(T,f)}{\partial f}\int_f^{f+\Delta f} df'$$

Ainsi, la variation de longueur de l'élastique a pour expression,

$$\Delta L = \frac{\partial L\,(T,f)}{\partial T}\,\Delta T + \frac{\partial L\,(T,f)}{\partial f}\,\Delta f$$

et peut être mise sous la forme,

$$\Delta L = L\left(\frac{1}{L}\,\frac{\partial L\,(T,f)}{\partial T}\right)\Delta T + L\left(\frac{1}{L}\,\frac{\partial L\,(T,f)}{\partial f}\right)\Delta f$$

En utilisant les deux propriétés physiques de l'élastique, on obtient l'expression suivante pour la variation de longueur de l'élastique,

$$\Delta L = \alpha_f\,L\,\Delta T + \chi_T\,L\,\Delta f$$

1.4 Fonction d'état : volume

★★☆☆ Un récipient de forme conique avec un angle d'ouverture α autour de l'axe vertical est rempli de liquide incompressible (fig. 1.1). Le liquide entre dans le cône à vitesse constante v en passant par un tube circulaire de diamètre d attaché à la base du cône. Lorsque la surface circulaire du liquide a un rayon $R\,(h\,(t))$ et se trouve à hauteur $h\,(t)$ dans le cône, le volume de liquide dans le cône est,

$$V\,(t) = \frac{1}{3}\,\pi\,R^2\,(h\,(t))\,h\,(t)$$

où on a fait l'approximation que $d \ll R\,(h\,(t))$. Initialement, il n'y a pas de liquide dans le cône, c'est-à-dire $h\,(0) = 0$.

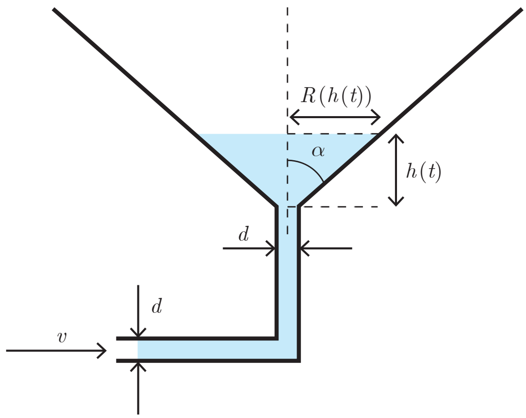

Fig. 1.1 Un liquide pénètre dans un entonnoir à vitesse constante v en passant par un tube de diamètre d. L'entonnoir est un cône d'angle d'ouverture α. L'axe du cône est vertical.

Déterminer la dérivée temporelle du volume de liquide $\dot{V}\,(t)$ dans le récipient et en déduire la hauteur $h\,(t)$.

$\boxed{1.4}$ **Solution**

Le rayon de la surface circulaire du liquide dans le cône s'écrit,

$$R\left(h\left(t\right)\right) = \tan\alpha\, h\left(t\right)$$

où l'angle α est constant. Ainsi, le volume du cône s'écrit,

$$V\left(t\right) = \frac{1}{3}\,\pi\, R^2\left(h\left(t\right)\right) h\left(t\right) = \frac{1}{3}\,\pi \tan^2\alpha\, h^3\left(t\right)$$

et sa dérivée temporelle est,

$$\dot{V}\left(t\right) = \pi\, \tan^2\alpha\, h^2\left(t\right)\, \dot{h}\left(t\right)$$

D'autre part, étant donné que le liquide est incompressible, la dérivée temporelle du volume de liquide est le débit entrant,

$$\dot{V}\left(t\right) = \frac{dV\left(t\right)}{dt} = A\, \frac{dr\left(t\right)}{dt}$$

où A est l'aire de la section du tube, d est le diamètre du tube et dr est le déplacement infinitésimal du liquide durant l'intervalle de temps infinitésimal dt. Compte tenu de la vitesse v constante, la dérivée temporelle du volume devient,

$$\dot{V} = A\, \frac{dr}{dt} = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v = \pi\, \frac{v\, d^2}{4} = \text{cste}$$

En identifiant ces deux expressions de la dérivée temporelle du volume, on obtient l'équation,

$$\tan^2\alpha\, h^2\left(t\right)\, \dot{h}\left(t\right) = \frac{v\, d^2}{4}$$

qui peut mise sous la forme suivante,

$$h^2\left(t\right)\, dh\left(t\right) = \frac{v\, d^2}{4\, \tan^2\alpha}\, dt$$

L'intégrale de cette équation par rapport au temps s'écrit,

$$\int_0^{h(t)} h'^2\left(t'\right)\, dh'\left(t'\right) = \frac{v\, t\, d^2}{4\, \tan^2\alpha} \int_0^t dt'$$

Le résultat de cette intégrale est,

$$\frac{1}{3}\, h^3\left(t\right) = \frac{v\, t\, d^2}{4\, \tan^2\alpha}$$

Ainsi, la hauteur de liquide dans le cône est,

$$h\left(t\right) = \sqrt[3]{\frac{3\, v\, t\, d^2}{4 \tan^2\alpha}}$$

1.8 Concentration de sel dans une baignoire

★★★☆ Une baignoire contient $N_s(t)$ moles de sel dissoutes dans $N_e(t)$ moles d'eau. Un courant d'eau douce constant $I_e^{\text{in}} > 0$ entre dans la baignoire. On suppose que l'eau est complètement brassée dans la baignoire de sorte que la concentration de sel peut être considérée comme homogène. Un courant d'eau salée constant $I_{es}^{\text{out}} = I_s^{\text{out}}(t) + I_e^{\text{out}}(t)$ sort de la baignoire qui fuit, où $I_s^{\text{out}}(t) < 0$ et $I_e^{\text{out}}(t) < 0$ sont les courants sortants de sel et d'eau. Déterminer la concentration de sel,

$$c_s(t) = \frac{N_s(t)}{N_s(t) + N_e(t)}$$

comme fonction du temps t compte tenu des conditions initiales $N_s(0)$ et $N_e(0)$.

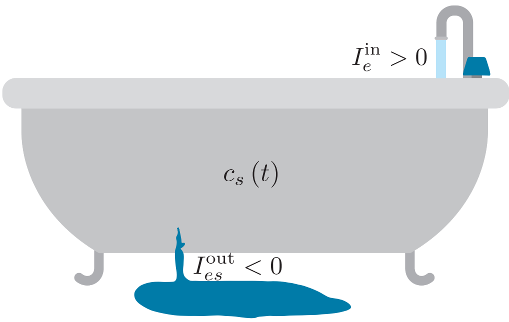

Fig. 1.2 Un courant d'eau constant $I_e^{\text{in}} > 0$ entre dans la baignoire et un courant d'eau salée constant en sort $I_{es}^{\text{out}} < 0$ en raison d'une fuite. La concentration de sel dans la baignoire est $c_s(t)$.

$\boxed{1.8}$ Solution

Premièrement, on écrit les équations de bilan pour le sel et l'eau dans la baignoire. La dérivée temporelle du nombre de moles de sel dans la baignoire est égale au courant sortant de sel et la dérivée temporelle du nombre de moles d'eau est la somme des courants entrant et sortant d'eau douce,

$$\begin{aligned} \dot{N}_s(t) &= I_s^{\text{out}}(t) \\ \dot{N}_e(t) &= I_e^{\text{in}} + I_e^{\text{out}}(t) \end{aligned}$$

où $I_e^{\text{in}} > 0$ est le courant entrant d'eau douce, et $I_s^{\text{out}} < 0$ et $I_e^{\text{out}} < 0$ sont les courants sortants de sel et d'eau. Comme un courant est une grandeur extensive, le courant sortant d'eau salée I_{es}^{out} est la somme des courants sortants de sel $I_s^{\text{out}}(t)$ et d'eau $I_e^{\text{out}}(t)$,

$$I_{es}^{\text{out}} = I_s^{\text{out}}(t) + I_e^{\text{out}}(t)$$

Deuxièmement, on suppose que l'eau et le sel sont complètement mélangés dans la baignoire de sorte que la concentration de sel peut être considérée comme homogène. Ainsi, le courant sortant de sel $I_s^{\text{out}}(t)$ est égal au produit de sa concentration molaire $c_s(t)$ dans la baignoire et du courant sortant d'eau salée I_{es}^{out},

$$I_s^{\text{out}}(t) = c_s(t)\ I_{es}^{\text{out}}$$

En substituant cette équation pour le courant $I_s^{\text{out}}(t)$ dans l'équation de bilan pour le sel dans la baignoire, en utilisant la définition de la concentration molaire,

$$c_s(t) = \frac{N_s(t)}{N_s(t) + N_e(t)}$$

et en divisant le résultat par $N_s(t)$, on obtient,

$$\frac{\dot{N}_s(t)}{N_s(t)} = \frac{I_{es}^{\text{out}}}{N_s(t) + N_e(t)}$$

En sommant les deux premières équations de bilan, on obtient l'équation de bilan pour l'eau salée dans la baignoire,

$$\dot{N}_s(t) + \dot{N}_e(t) = I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}$$

Comme le terme dans le membre de droite de cette équation est constant, elle peut être intégrée par rapport au temps de $t = 0$ à t,

$$\int_{N_s(0)}^{N_s(t)} dN_s'(t') + \int_{N_e(0)}^{N_e(t)} dN_e'(t') = \left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) \int_0^t dt'$$

ce qui donne,

$$N_s(t) + N_e(t) = N_s(0) + N_e(0) + \left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t$$

En substituant ce résultat dans l'équation pour $\dot{N}_s(t) / N_s(t)$, on obtient,

$$\frac{\dot{N}_s(t)}{N_s(t)} = \frac{I_{es}^{\text{out}}}{N_s(0) + N_e(0) + (I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}})\, t}$$

Cette équation peut être intégrée par rapport au temps de $t = 0$ à t,

$$\int_{N_s(0)}^{N_s(t)} \frac{dN_s'(t')}{N_s'(t')} = \frac{I_{es}^{\text{out}}}{I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}} \int_0^t \frac{\left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) dt'}{N_s(0) + N_e(0) + (I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}})\, t'}$$

ce qui donne,

$$\ln\left(\frac{N_s(t)}{N_s(0)}\right) = \frac{I_{es}^{\text{out}}}{I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}} \ln\left(\frac{N_s(0) + N_e(0) + \left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)$$

En prenant l'exponentielle de ce résultat, on obtient,

$$N_s(t) = N_s(0) \left(1 + \frac{\left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{\dfrac{I_{es}^{\text{out}}}{I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}}}$$

En substituant les relations pour $N_s(t)$ et $N_s(t) + N_e(t)$ dans l'expression concentration molaire de sel $c_s(t)$, on obtient,

$$c_s(t) = \frac{N_s(0)}{N_s(0) + N_e(0) + \left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t} \left(1 + \frac{\left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{\dfrac{I_{es}^{\text{out}}}{I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}}}$$

Ce résultat peut être mis sous la forme suivante (fig. 1.3),

$$\begin{aligned}
c_s(t) &= \frac{N_s(0)}{N_s(0) + N_e(0)} \left(1 + \frac{\left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{\dfrac{I_{es}^{\text{out}}}{I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}} - 1} \\
&= \frac{N_s(0)}{N_s(0) + N_e(0)} \left(1 + \frac{\left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{-\dfrac{I_e^{\text{in}}}{I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}}} \\
&= \frac{N_s(0)}{N_s(0) + N_e(0)} \left(1 + \frac{\left(I_e^{\text{in}} + I_{es}^{\text{out}}\right) t}{N_s(0) + N_e(0)}\right)^{-\dfrac{1}{1 + I_{es}^{\text{out}}/I_e^{\text{in}}}}
\end{aligned}$$

1.9 Capillarité : angle de contact

★★★★ Pour tenir compte des effets de capillarité, on considère que l'énergie interne d'un système contient des contributions qui sont proportionnelles aux aires des interfaces entre les différentes parties du système. Pour une goutte de liquide mouillant une surface horizontale (fig. 1.4), on suppose que le liquide a une forme de calotte sphérique. Alors, l'énergie interne est exprimée comme $U(h, R) = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,\pi a^2 + \gamma_{\ell g}\,A$ où $a = R\sin\theta = \sqrt{2Rh - h^2}$ est le rayon et $A = 2\pi Rh$ est l'aire latérale de la calotte sphérique de liquide de hauteur

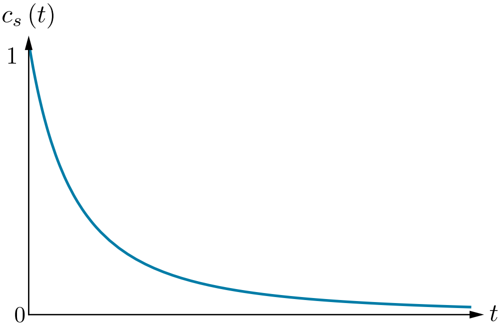

Fig. 1.3 La concentration de sel $c_s(t)$ dans l'eau salée de la baignoire est une fonction décroissante du temps qui tend asymptotiquement vers 0.

h obtenue en tronquant la sphère de rayon R avec la surface horizontale du substrat solide. Les paramètres $\gamma_{s\ell}$, γ_{sg}, $\gamma_{\ell g}$ caractérisent les substances et sont indépendants de la forme de la goutte. Montrer que l'angle de contact θ est donné par,

$$(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \gamma_{\ell g} \cos\theta = 0$$

en minimisant l'énergie interne $U(h, R)$ compte tenu de la condition que le volume $V(h, R) = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) = V_0$ de la calotte sphérique de liquide est constant.

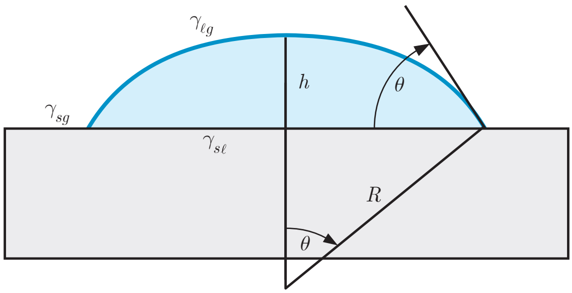

Fig. 1.4 Une goutte de liquide sur un substrat horizontal a une forme de calotte sphérique. L'angle θ est appelé angle de contact. Une tension superficielle est définie pour les trois interfaces : solide-liquide ($\gamma_{s\ell}$), solide-gaz (γ_{sg}) et liquide-gaz ($\gamma_{\ell g}$).

1.9 Solution

Afin de minimiser l'énergie interne $U(h, R)$, on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour imposer la contrainte du volume fixé de la goutte, c'est-à-dire $V(h, R) = V_0$. La fonction de Lagrange $L(h, R, \lambda)$ à minimiser est,

$$\begin{aligned} L(h, R, \lambda) &= U(h, R) - \lambda\Big(V(h, R) - V_0\Big) \\ &= (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,\pi\left(2Rh - h^2\right) + \gamma_{\ell g}\, 2\pi R h \\ &\quad - \lambda\left(\frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) - V_0\right) \end{aligned}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange et la fonction de Lagrange $L(h, R, \lambda)$ représente la même grandeur que l'énergie interne $U(h, R)$ compte tenu de la contrainte. D'après cette méthode, la dérivée partielle de la fonction $L(h, R, \lambda)$ par rapport à h doit s'annuler,

$$\frac{\partial L}{\partial h} = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\, 2\pi (R - h) + \gamma_{\ell g}\, 2\pi R - \lambda\pi\left(2Rh - h^2\right) = 0$$

ce qui donne une expression pour le multiplicateur de Lagrange,

$$\lambda = \left(\frac{2}{2Rh - h^2}\right)(R - h)(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \left(\frac{2}{2Rh - h^2}\right) R\,\gamma_{\ell g}$$

La dérivée partielle de la fonction $L\,(h, R, \lambda)$ par rapport à R doit s'annuler également,

$$\frac{\partial L}{\partial R} = (\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg})\,2\pi h + \gamma_{\ell g}\,2\pi h - \lambda\pi h^2 = 0$$

ce qui donne une autre expression pour le multiplicateur de Lagrange,

$$\lambda = \frac{2}{h}\,(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \frac{2}{h}\,\gamma_{\ell g}$$

En identifiant les deux expressions pour le multiplicateur de Lagrange λ, on obtient,

$$(R - h)\,(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + R\,\gamma_{\ell g} = (2R - h)\,(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + (2R - h)\,\gamma_{\ell g}$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \left(\frac{R - h}{R}\right)\gamma_{\ell g} = 0$$

Par inspection graphique (fig. 1.4),

$$\cos\theta = \frac{R - h}{R}$$

Ainsi, on obtient la condition suivante,

$$(\gamma_{s\ell} - \gamma_{sg}) + \gamma_{\ell g}\,\cos\theta = 0$$

1.10 Énergie : thermodynamique et mécanique

Un poids de masse M est suspendu à un fil. La tension $\boldsymbol{T}$ dans le fil est telle que le poids descend verticalement avec une vitesse $\boldsymbol{v}$ qui peut varier au cours du temps.

1) Déterminer la dérivée temporelle de l'énergie mécanique E_{mec} qui est la somme des énergies cinétique et potentielle.
2) Déterminer la dérivée temporelle de l'énergie E du système d'après le premier principe de la thermodynamique (1.18).

$\boxed{1.10}$ Solution

1) Du point de vue de la mécanique, la projection de l'équation du mouvement de Newton pour le poids, $\boldsymbol{T} + M\,\boldsymbol{g} = M\,\boldsymbol{a}$, le long de l'axe de coordonnée Oz orienté vers le bas s'écrit,

$$-T + M\,g = M\ddot{z}$$

L'évolution temporelle de l'énergie mécanique $E_{\,\text{mec}}$ est obtenue en multipliant ce résultat par $\dot{z}$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,M\dot{z}^2 - \,Mgz\right) = -\,T\dot{z}$$

Comme l'énergie mécanique $E_{\,\text{mec}}$ est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E_{\,\text{mec}} = \frac{1}{2}\,M\dot{z}^2 - \,Mgz$$

le résultat précédent peut être mis sous la forme suivante,

$$\dot{E}_{\,\text{mec}} = -\,T\dot{z}$$

2) Du point de vue de la thermodynamique, l'énergie E du système est exprimée comme,

$$E = \frac{1}{2}\,M\dot{z}^2 + U$$

où U est l'énergie interne du système. Comme le système est constitué de la masse M seulement, son poids est une force extérieure. Ainsi, l'énergie potentielle gravitationnelle n'est pas inclue dans l'énergie E du système. Vu que l'énergie interne U est une fonction des variables d'état du système uniquement, elle est indépendante de la hauteur z dans le champ gravitationnel terrestre. Comme il n'y a pas de transfert de chaleur entre le poids et l'environnement, le courant de chaleur s'annule, c'est-à-dire $I_Q = 0$. De plus, on suppose que le poids est indéformable, ce qui implique que la puissance mécanique de déformation s'annule également, c'est-à-dire $P_W = 0$. La puissance extérieure est due au poids $M\,\boldsymbol{g}$ et à la tension $\boldsymbol{T}$ qui peut modifier l'énergie cinétique du système,

$$P^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} + M\,\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} = -\,T\dot{z} + Mg\dot{z}$$

Le premier principe $\dot{E} = P^{\,\text{ext}}$ implique,

$$\dot{E} = \left(-\,T + Mg\right)\dot{z}$$

Vu que l'énergie interne de ce système est constante, c'est-à-dire $\dot{U} = 0$, le résultat précédent se réduit à,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,M\dot{z}^2\right) = \left(-\,T + Mg\right)\dot{z}$$

Les équations d'évolution exprimées en termes des dérivées temporelles de l'énergie mécanique $E_{\,\text{mec}}$ et de l'énergie E sont mathématiquement les mêmes. En revanche, la définition des systèmes mécanique et thermodynamique est implicitement différente. Pour le système mécanique, l'énergie mécanique $E_{\,\text{mec}}$ contient l'énergie potentielle gravitationnelle d'interaction Mgz entre le poids et la terre. Cela implique que le système mécanique est de facto constitué du poids de masse M et de la terre puisque l'énergie potentielle est interne au système. En revanche, pour le système thermodynamique, l'énergie E se réduit à l'énergie cinétique du poids de masse M, ce qui implique ce système thermodynamique contient uniquement le poids. Ainsi, la puissance extérieure P^{ext} du système thermodynamique contient un terme de puissance $Mg\dot{z}$ dû au poids au poids Mg considéré comme une force extérieure, contrairement au cas du système mécanique pour lequel le poids est une force intérieure.

1.11 Oscillateur harmonique amorti

★★★★ Un système isolé constitué d'un point matériel de masse M attaché à un ressort de constante élastique k est immergé dans un fluide visqueux homogène et immobile. Le point matériel est soumis à une force de frottement visqueux en régime laminaire $\boldsymbol{F}_f\,(t) = -\,\lambda\,\boldsymbol{v}\,(t)$ où $\boldsymbol{v}\,(t)$ est la vitesse du point matériel et où $\lambda > 0$. Le frottement visqueux interne entre le point matériel et le fluide est caractérisé par une variable d'état extensive scalaire $S\,(t)$. La fonction d'état intensive conjuguée à la variable $S\,(t)$ est,

$$T\,(t) = \frac{dU\,(S\,(t))}{dS\,(t)}$$

Le facteur d'amortissement γ et la pulsation ω_0 des oscillations non amorties sont définis comme,

$$\gamma = \frac{\lambda}{2M} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Le mouvement rectiligne du point matériel a lieu le long de l'axe Ox. La position d'équilibre du ressort coïncide avec l'origine O. Ainsi, en régime d'amortissement faible où $\gamma \ll \omega_0$, la coordonnée de position $x\,(t)$ s'écrit,

$$x\,(t) = A\,e^{-\,\gamma t}\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

où A est l'amplitude maximale du mouvement oscillatoire et où ϕ est un angle de déphasage. En régime d'amortissement faible,

1) déterminer l'équation du mouvement harmonique amorti le long de l'axe Ox ;
2) déterminer l'énergie $E\,(S\,(t)\,,t)$ du système ;
3) déterminer la dérivée temporelle de la variable d'état extensive $\dot{S}\,(t)$.

1.11 Solution

1) Étant donné que la position d'équilibre coïncide avec l'origine, la déformation coïncide avec le déplacement. Ainsi, la force élastique exercée par le ressort de constante élastique k s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_e\,(t) = -\,k\,\boldsymbol{r}\,(t) = -\,k\,x\,(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

La force de frottement visqueux s'écrit,

$$\boldsymbol{F}_f\,(t) = -\,\lambda\,\boldsymbol{v}\,(t) = -\,\lambda\,\dot{x}\,(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

La force élastique $\boldsymbol{F}_e\,(t)$ et la force de frottement visqueux $\boldsymbol{F}_f\,(t)$ sont des forces intérieures au système mais extérieures au sous-système formé du point matériel. Ainsi, le théorème du centre de masse appliqué au sous-système formé du point matériel s'écrit,

$$\dot{\boldsymbol{P}}\,(t) = \boldsymbol{F}_e\,(t) + \boldsymbol{F}_f\,(t)$$

Compte tenu de la masse constante du point matériel,

$$\dot{\boldsymbol{P}}\,(t) = M\,\dot{\boldsymbol{v}}\,(t) = M\,\ddot{x}\,(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

l'équation vectorielle du mouvement devient,

$$M\,\dot{\boldsymbol{v}}\,(t) = -\,k\,\boldsymbol{r}\,(t) -\,\lambda\,\boldsymbol{v}\,(t)$$

La projection de cette équation le long de l'axe du mouvement Ox s'écrit,

$$M\,\ddot{x}\,(t) = -\,k\,x\,(t) -\,\lambda\,\dot{x}\,(t)$$

et elle est remise en forme comme,

$$\ddot{x}\,(t) + 2\,\gamma\,\dot{x}\,(t) + \omega_0^2\,x\,(t) = 0$$

2) Les variables d'état du système sont la position $\boldsymbol{r}\,(t)$ et la quantité de mouvement $\boldsymbol{P}\,(t)$ du point matériel et la variable d'état extensive $S\,(t)$ caractérisant le frottement dans le fluide homogène. La fonction d'état énergie du système est la somme de l'énergie cinétique du point matériel et de l'énergie interne,

$$E\left(\boldsymbol{r}\,(t)\,,\boldsymbol{P}\,(t)\,S\,(t)\right) = \frac{\boldsymbol{P}^2\,(t)}{2M} + U\left(\boldsymbol{r}\,(t)\,,S\,(t)\right)$$

L'énergie cinétique s'écrit explicitement comme,

$$\frac{\boldsymbol{P}^2\,(t)}{2M} = \frac{1}{2}\,M\,\boldsymbol{v}^2\,(t) = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}^2\,(t)$$

L'énergie interne est la somme de l'énergie potentielle élastique et d'une partie caractérisant le frottement,

$$U\left(\boldsymbol{r}\,(t)\,,S\,(t)\right) = \frac{1}{2}\,k\,\boldsymbol{r}^2\,(t) + U\left(S\,(t)\right) = \frac{1}{2}\,k\,x^2\,(t) + U\left(S\,(t)\right)$$

Ainsi, l'énergie devient,

$$E\left(x\,(t)\,,\dot{x}\,(t)\,,S\,(t)\right) = \frac{1}{2}\,M\,\dot{x}^2\,(t) + \frac{1}{2}\,k\,x^2\,(t) + U\left(S\,(t)\right)$$

La solution du mouvement oscillatoire en régime d'amortissement faible s'écrit,

$$x\,(t) = A\,e^{-\,\gamma\,t}\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

et sa dérivée temporelle est,

$$\dot{x}\,(t) = -\,A\,e^{-\,\gamma\,t}\,\Big(\omega_0\,\sin\left(\omega_0 t + \phi\right) + \gamma\,\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)\Big)$$

En régime d'amortissement faible, c'est-à-dire $\gamma \ll \omega_0$, on en déduit que,

$$\begin{aligned}
x^2\,(t) &= A^2 e^{-\,2\,\gamma\,t}\cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right)\\
\dot{x}^2\,(t) &= \omega_0^2\,A^2 e^{-\,2\,\gamma\,t}\sin^2\left(\omega_0 t + \phi\right) = \frac{k}{M}\,A^2 e^{-\,2\gamma\,t}\sin^2\left(\omega_0 t + \phi\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'énergie du système devient,

$$E\left(S\,(t)\,,t\right) = \frac{1}{2}\,k\,A^2 e^{-\,2\gamma t}\Big(\sin^2\left(\omega_0 t + \phi\right) + \cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right)\Big) + U\left(S\,(t)\right)$$

et se réduit à,

$$E\left(S\,(t)\,,t\right) = \frac{1}{2}\,k\,A^2 e^{-\,2\,\gamma\,t} + U\left(S\,(t)\right)$$

3) Étant donné que le système est isolé, la dérivée temporelle de l'énergie est nulle,

$$\dot{E}\left(S\,(t)\,,t\right) = -\,\gamma\,k\,A^2 e^{-\,2\gamma t} + \frac{dU\left(S\,(t)\right)}{dS\,(t)}\,\dot{S}\,(t) = 0$$

Compte tenu de la fonction d'état $T\,(t)$ conjuguée à la variable d'état $S\,(t)$,

$$T\,(t) = \frac{dU\left(S\,(t)\right)}{dS\,(t)}$$

on en conclut que la dérivée temporelle $\dot{S}\,(t)$ est strictement croissante,

$$\dot{S}\,(t) = \gamma\,k\,A^2\,\frac{e^{-\,2\gamma t}}{T\,(t)} > 0$$